

Total number of printed pages–15

3 (Sem–4/CBCS) MAT HG/RC

2021

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

Full Marks : 80

Time : Three hours

***The figures in the margin indicate
full marks for the questions.***

Answer **either** in English **or** in Assamese.

Paper : MAT–HG–4016/MAT–RC–4016

(Real Analysis)

GROUP–A

Marks : 40

1. Answer the following questions : $1 \times 6 = 6$

তলত দিয়া প্ৰশ্ন সমূহৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Write the commutative property of real numbers with respect to the binary operation addition.

দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া যোগ সাপেক্ষে বাস্তব সংখ্যাৰ ক্ৰমবিনিময় ধৰ্মটো লিখা।

Contd.

(b) If x is a real number, find x , satisfying $|x-2|=6$.

যদি x এটা বাস্তব সংখ্যা, তেন্তে $|x-2|=6$ হ'লে, x -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(c) Find the limit points of the set $S = \{1 + (-1)^n\}, n \in N$.

$S = \{1 + (-1)^n\}, n \in N$ সংহতিৰ চৰম বিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

(d) $S = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in N\right\}$. Find $\sup S$.

$S = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in N\right\}$ হ'লে $\sup S$ নিৰ্ণয় কৰা।

(e) Define an open set in the set of real numbers.

বাস্তব সংখ্যাৰ সংহতিত এটা মুক্ত সংহতিৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(f) Find lower and upper bounds of the sequence $\left\{1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \dots\right\}$, if exist.

$\left\{1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ অনুক্রমটোৰ নিম্ন আৰু উচ্চ সীমা নিৰ্ণয় কৰা।

2. Answer the following questions : $2 \times 5 = 10$

তলত দিয়া প্ৰশ্ন সমূহৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Express the set S as interval of real line, where $S = \left\{ x \in R : \frac{2x+1}{x+2} < 1 \right\}$.

$$S = \left\{ x \in R : \frac{2x+1}{x+2} < 1 \right\} \text{ সংহতিটো বাস্তব}$$

সংখ্যা ৰেখাৰ অন্তৰ হিচাবে প্ৰকাশ কৰা।

(b) Show that the set $S = \{x \in R : 1 < x < 5\}$ is open but not a closed set.

দেখুওৱা যে $S = \{x \in R : 1 < x < 5\}$ সংহতিটো এটা মুক্ত সংহতিহে, বন্ধ সংহতি নহয়।

(c) Define continuity of a real function. When is it called uniformly continuous ?

বাস্তব ফলন এটাৰ অনবিচ্ছিন্নতাৰ সংজ্ঞা দিয়া। কেতিয়া ফলন এটাক সম-অনবিচ্ছিন্ন বুলি কোৱা হব?

(d) Define absolute convergence of a sequence.

Every absolute convergent sequence of real numbers is also convergent. Is it true ?

অনুক্ৰম এটাৰ পৰম-অভিসাৰিতাৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰতিটো
পৰম-অভিসাৰী অনুক্ৰমেই অভিসাৰি অনুক্ৰম। উক্তিটো
সচানে?

(e) Find the value of :

মান নিৰ্ণয় কৰা :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{4x - 8}$$

3. Answer **any four** from the following questions : 6×4=24

তলত দিয়া প্ৰশ্ন সমূহৰ যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা :

(a) For all real numbers x and y , prove that 3+3=6

সকলোবোৰ বাস্তব সংখ্যা x আৰু y -ৰ বাবে প্ৰমাণ কৰা
যে

(i) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(ii) $|x - y| \geq (||x| - |y||)$

(b) Show that union of two closed sets is a closed set.

Give an example to show that the union of an arbitrary family of closed sets may not be closed. 4+2=6

দেখুওৱা যে দুটা বন্ধ সংহতিৰ মিলনো এটা বন্ধ সংহতি হব। এটা উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওৱা যে বন্ধ সংহতিৰ যাদৃচ্ছিক গোটৰ মিলন এটা বন্ধ সংহতি নহবও পাৰে।

- (c) Show that a sequence cannot converge to more than one point. 6

দেখুওৱা যে অনুক্রম এটা কেতিয়াও এটাতকৈ অধিক বিন্দুলৈ অভিসাৰি হব নোৱাৰে।

- (d) A function f defined in the set of real numbers by

$$f(x) = 1, \text{ when } x \text{ is irrational} \\ = -1, \text{ when } x \text{ is rational.}$$

Show that f is discontinuous at every point. 6

এটা বাস্তব সংহতিৰ ফলন এনেদৰে সংজ্ঞাবদ্ধ

$$f(x) = 1, \text{ যেতিয়া } x \text{ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা} \\ = -1, \text{ যেতিয়া } x \text{ এটা পৰিমেয় সংখ্যা}$$

দেখুওৱা যে f ফলনটো সকলো বাস্তব বিন্দুতে অনবিচ্ছিন্ন।

- (e) Show that the set of real numbers is not a countable set. 6

দেখুওৱা যে বাস্তব সংখ্যাৰ সংহতিটো এটা গণনক্ষম সংহতি নহয়।

(f) Prove that if a real function is continuous in a closed interval, then it is also bounded in that interval. 6

প্রমাণ কৰা যে যদি এটা বাস্তৱ ফলন এটা বন্ধ সংহতিত অনবিচ্ছিন্ন হয়, তেনেহলে ই সেই সংহতিত পৰিবদ্ধও হব।

GROUP-B

Marks : 40

(Answer any four)

(যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ কৰা)

4. Test the convergence of sequences $\langle x_n \rangle$ and $\langle y_n \rangle$ as defined below and find the limit if exists for each. 5+5=10

তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাবদ্ধ অনুক্রম $\langle x_n \rangle$ আৰু $\langle y_n \rangle$ -ৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা আৰু স্থিত হলে অভিসাৰি বিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

$$(i) \quad x_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$(ii) \quad y_n = (-1)^n n^2$$

5. Prove that a convergent sequence is bounded.

Give a counter example to show that a bounded sequence may not be convergent.

$$8+2=10$$

প্ৰমাণ কৰা যে অভিসাৰি অনুক্ৰম এটা সদায় পৰিবদ্ধ হয়। এটা উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওৱা যে পৰিবদ্ধ অনুক্ৰম এটা অভিসাৰি নহবও পাৰে।

6. Prove that the function $f(x) = x^2$ is uniformly continuous in $]-1, 1[$, but not uniformly continuous in $[0, \infty[$. $5+5=10$

প্ৰমাণ কৰা যে $f(x) = x^2$ ফলনটো $]-1, 1[$ ত সম-অনবিচ্ছিন্ন হয়, কিন্তু $[0, \infty[$ ত সম-অনবিচ্ছিন্ন নহয়।

7. (a) Prove that there exists a rational number in between every pair of two unequal real numbers. 5

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিযোৰ অসমান বাস্তব সংখ্যাৰ মাজত এটা পৰিমেয় সংখ্যা স্থিত হয়।

- (b) Show that $\sqrt{2}$ is not a rational number. 5

দেখুওৱা যে $\sqrt{2}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা নহয়।

8. Define nested sequence of interval. Show that if $I_n = [a_n, b_n], n \in N$ is a nested sequence of closed bounded intervals, then there exists a number k in R such that $k \in I_n$ for all $n \in N$. 2+8=10

অন্তৰালৰ অন্তৰ্বৰ্তী অনুক্রমৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে যদি $I_n = [a_n, b_n], n \in N$ বন্ধ অন্তৰালৰ এটা অন্তৰ্বৰ্তী অনুক্রম হয়, তেন্তে এটা বাস্তব সংখ্যা k স্থিত হব, যাতে সকলোবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যা n -ৰ বাবে $k \in I_n$ হয়।

9. Define a monotone sequence. Prove that a monotone sequence of real numbers is convergent if and only if it is bounded. 2+8=10

একদিষ্ট অনুক্রমৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে বাস্তব সংখ্যাৰ এটা একদিষ্ট অনুক্রম অনুসাৰি হব যদি আৰু যদিহে ই পৰিবিদ্ধ হয়।

Paper : MAT-HG-4026

(Numerical Analysis)

GROUP-A

1. Answer the following questions : 1×6=6

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Express the following system of equations in Matrix form :

তলত উল্লেখ কৰা সমীকৰণ প্ৰণালী সমূহ মৌলিকৰূপত প্ৰকাশ কৰা :

$$2x + 3y + 4z = 12$$

$$8x - 3y + 2z = 20$$

$$4x - 11y - z = 33$$

(b) Define the operator E and Δ .

E আৰু Δ সংকাৰকৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(c) Write down Newton's forward interpolation formula.

নিউটনৰ অগ্ৰগামী অন্তৰ্বেশন সূত্ৰটো লিখা।

(d) Evaluate Δa^x .

Δa^x নির্ণয় কৰা।

(e) State the formula for Simpson's 3/8th rule.

চিম্পচনৰ 3/8 তম নিয়মৰ সূত্রটো উল্লেখ কৰা।

(f) Write *one* advantage of Lagrange's interpolation formula.

লাগ্ৰাঞ্জৰ অন্তৰ্বেশন সূত্রৰ এটা সুবিধা লিখা।

2. Answer the following questions : $2 \times 5 = 10$

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা :

(a) Establish the relation $E = 1 + \Delta$.

$E = 1 + \Delta$ সম্বন্ধটো স্থাপন কৰা।

(b) Evaluate (মান উলিউৰা) $\frac{\Delta^2}{E} x^3$.

(c) If $u_0 = 1, u_1 = 11, u_2 = 21, u_3 = 28$ and

$u_4 = 29$ then find $\Delta^3 u_0$.

যদি $u_0 = 1, u_1 = 11, u_2 = 21, u_3 = 28$ আৰু

$u_4 = 29$, তেন্তে $\Delta^4 u_0$ নির্ণয় কৰা।

- (d) Construct a divided difference table from the following data :

তলত দিয়া তালিকাৰ পৰা এখন বিভাজিত টেবুল গঠন কৰা।

x	-1	1	2	3
y	-21	15	12	3

- (e) Estimate approximate derivative of $f(x) = x^2$ at $x=1$ for $h = 0.2, 0.1, 0.05$ and 0.01 .

$f(x) = x^2$ ফলনৰ $x=1$ বিন্দুত $h = 0.2, 0.1, 0.05$ আৰু 0.01 ৰ বাবে মোতামতি অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা।

3. Answer **any four** questions from the following : 6×4=24

তলৰ যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) Solve by Gauss elimination method of the following system of equations.

গাউজৰ অপসাৰণ পদ্ধতিৰ সহায়ত তলৰ সমীকৰণ প্ৰণালী কেইটা সমাধান কৰা।

$$x - y + z = 1, -3x + 2y - 3z = -6, 2x - 5y + 4z = 5.$$

- (b) If $f(x)$ is a polynomial of n th degree in x , then prove that n th difference of $f(x)$ is constant.

যদি $f(x)$ এটা n তম ঘাতৰ বহুপদ ৰাশি হয়, তেন্তে
প্ৰমাণ কৰা যে n -তমৰ অন্তৰ এটা ধ্ৰুবক।

(c) Determine the function whose first
difference is $x^3 + 3x^2 + 5x + 12$.

এটা ফলন নিৰ্ণয় কৰা য'ত ফলনটোৰ প্ৰথম অন্তৰ
 $x^3 + 3x^2 + 5x + 12$

(d) State and prove Newton's formula for
forward interpolation

নিউটনৰ অগ্রগামী অন্তৰ্বেশন সূত্র লিখা আৰু প্ৰমাণ
কৰা।

(e) Evaluate (মান নিৰ্ণয় কৰা) :

$$\Delta^2 \left(\frac{3x+4}{x^2+3x+2} \right)$$

(f) Find the first and second order
derivative of $f(x)$ at $x=0$ from the
following data :

তলত উল্লেখ কৰা তথ্যৰ পৰা $x=0$ বিন্দুত $f(x)$
ফলনৰ প্ৰথম আৰু দ্বিতীয় অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰা :

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	8	15	7	6	2

GROUP-B

4. Answer **any four** questions from the following : $10 \times 4 = 40$

তলৰ যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা :

- (a) (i) From the following table, find the number of students who obtained less than 45 marks. 5

তলৰ তালিকাখনৰ পৰা 45 নম্বৰতকৈ কম নম্বৰ লাভ কৰা ছাত্ৰ-ছাত্ৰী সকলৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

- (ii) Given (দিয়া আছে)

x	5	7	11	13	17
$f(x)$	150	392	1452	2366	5202

Evaluate $f(9)$ using Lagrange's formula. 5

লাগ্ৰাঞ্জৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি $f(9)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (b) Solve the following system of equation by Gauss-Jacobi Method upto 12th iteration. 10

তলত উল্লেখ কৰা সমীকৰণ প্ৰণালীক 12-তম পুনৰাবৃত্তিলৈ গাউজ-জেকোবী পদ্ধতিৰ সমাধান কৰা।

$$8x + y + z = 8, \quad 2x + 4y + z = 4, \quad x + 2y + 3z = 5$$

- (c) Find the distance moved by a particle and its acceleration at the end of 4 seconds, for the following data. 10

তলত উল্লেখ কৰা তথ্যৰ পৰা 4 ছেকেণ্ডত অতিক্রম কৰা দূৰত্ব আৰু ত্বৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

t	0	1	3	4
v	21	15	12	10

- (d) Applying Simpson's rule, obtain an

approximate value of $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ by taking four equal intervals and hence obtain an approximate value of π correct to four places of decimals. 10

চাৰিটা সমান অন্তৰালত ভাগ কৰি চিম্পচনৰ নিয়মৰ

সহায়ত $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ ৰ মোতামতি মান নিৰ্ণয় কৰা আৰু

ইয়াৰ পৰা π ৰ মান চাৰি দশমিক স্থানলৈ মোতামতি মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (e) Evaluate $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$ by using

Romberg's formula. 10

ৰোমবাৰ্গৰ সূত্র ব্যবহার কৰি $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$ -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(f) Define numerical integration. Obtain a general quadrature formula for $\int_a^b f(x)dx$. Hence deduce Simpson's 1/3rd rule. 1+5+4=10

সাংখ্যিক অনুকলন মানে কি বুজা। $\int_a^b f(x)dx$ ৰ সাধাৰণ বৰ্গকৰণ সূত্ৰটো উলিওৱা। ইয়াৰ পৰা চিম্পচনৰ এক-তৃতীয়াংশ নিয়মৰ (1/3rd rule) সূত্ৰটো উলিওৱা।
